Université Abdelmalek Éssaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 Année: 2019/2020

Sol. de TD:Suites et Séries de Fonctions

séries $N°$3(Partie 2)

Professeur A. MOUSSAID

---

probléme 1

On note, pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in [0, +\infty], \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$$

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

   On note S la somme de cette série de fonction .

2. Montrer que S est de classe C^1 sur D et étudier le signe de $S^{'}(x)$ pour $x \in D$

3. Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$

4. Dresser le tableau de variations de S et tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Solution

1- Soit $x \in [0, +\infty[$

*- Si $0 \leq x < 1$, alors $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 1} x^n$ converge, donc , par théorème de comparaision pour des séroes à termes réels positifs, on conclut que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

*- Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.

*- Si $x > 1$,alors $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \leq \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leq \frac{1}{x^n}$

comme $|\frac{1}{x}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^n}$ converge, donc , par théorème de comparaision pour des séroes à termes réels positive, on conclut que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

Finalement, la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ et diverge en 1

2- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

*$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

* soit $n \in \mathbb{N}^*$, On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f_n^{'}(x) = \frac{1}{n} \frac{nx^{n-1}(x^{2n}+1) - x^n 2nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} = \frac{x^{n-1}(1 - x^{2n})}{(x^{2n}+1)^2}$$

Soit $a \in [0, 1[$ On a.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,a],$

$$\begin{aligned}
|f_n^{'}(x)| &= |\frac{x^{n-1}(1-x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}| \\
&\leq |\frac{x^{n-1}(1+x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}| \\
&= |\frac{x^{n-1}}{(x^{2n}+1)}| \\
&\leq x^{n-1} \\
&\leq a^{n-1}
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup_{[0,a]} |f_n^{'}(x)| \leq a^{n-1}$

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 1} a^{n-1}$ convege, donc , par théorème de comparaision pour des séroes à termes réels positifs, on conclut que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{[0,a]} |f_n^{'}(x)|$ converge.

Ceci montre que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n^{'}(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $[0,1[$.

* De même, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n^{'}(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$, et même sur tout $[a,+\infty[, \quad a > 1$ fixé.

D'après le théorème du cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que l'on peut dériver terme à terme:

$$\forall x \in D = [0,1[\cup]1,+\infty[, \qquad S^{'}(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n^{'}(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{(x^{2n}+1)^2}$$

Alors, il est clair que:

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1[, \qquad S^{'}(x) > 0 \\ \\ \forall x \in]1,+\infty[, \qquad S^{'}(x) < 0. \end{cases}$$

3-

*- **<u>Étude en</u>** <u>1</u>

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2n}$$

. Soit $A >$ fixé.

Puisque la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge et est à termes réels $\geq$ on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geq 2A$ (utilisation de la définition de la limite infinie)

On a :

$\forall x \in D, \quad S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x)$ (car les $f_k(x)$ sont tous $\geq$.)

Comme $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$ et que $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geq 2A$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \quad |x-1| \leq \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} f_k(x) \geq A$$

On a donc:

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-1| \leq \eta \Rightarrow S(x) \geq A$$

On conclut: $S(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$ (définition d'une limite infinie).

*- **<u>Étude en $+\infty$</u>**
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \sim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

. *- Montrons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement, donc uniformément , sur $[2, +\infty[$

On a:
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [2, +\infty[,$

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \\ &\leq \frac{x^n}{nx^{2n}} \\ &= \frac{1}{nx^n} \\ & \frac{1}{x^n} \\ & \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup_{[2,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ convege, donc , par théorème de comparaision pour des séroes à termes réels positifs, on conclut que la série $\sum_{n\geq 1} \sup_{[2,+\infty[} |f_n(x)|$ converge.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$.
puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Alors :

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n\geq 1}^{+\infty} 0 = 0$$

4-Tableau de variation de S

x	0		1		$+\infty$
$S^{'}(x)$	1	$+$	‖	$-$	
$S_n(x)$			$+\infty$ ‖ $+\infty$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

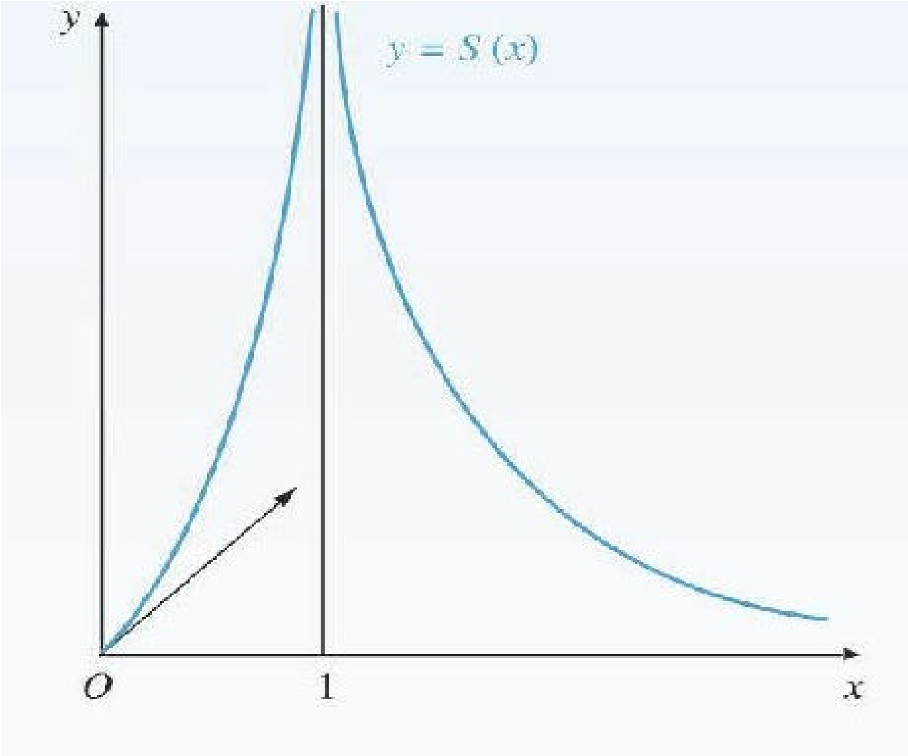

Figure 1: La courbe de S

probléme 2

1- Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est uniformément converge sur $\mathbb{R}^+$

2- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. et calculer sa dérivée.

4- En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \ln(1 + e^{-x})$$

Solution

1- Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est uniformément converge sur $\mathbb{R}^+$

On a la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est série alternée.

La série de fonctions $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ est positive, décroissante (car $g_n^{'}(x) = -e^{-nx} < 0$), et converge uniformément vers 0.

$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

2- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$, $\quad \forall n \geq 1$

D'aprés 1) la série converge uniformément donc la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. et calculer sa dérivée.

La série des dérivées est la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-nx}$ est normalement convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[, \qquad a > 0$
$|(-1)^n e^{-nx}| \leq e^{-na}$ (terme d'une série géométrique convergente $\forall x \in [a, +\infty[, \qquad a > 0$
donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$, (pour $x = 0$, il n'y a pas de convergence).
la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est uniformément convergente d'aprés 1) donc est convergente pour au moins un point de $\mathbb{R}_+^*$.
D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$x \mapsto \sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

(série géometrique de raison $-e^{-x}$).

4- En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \ln(1 + e^{-x})$$

On a:

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Donc

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-nt} dt = \int_0^x -\frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt$$

On peut inverser $\int$ et $\sum$ puis qu'il y a une convergence uniformément de la série donc:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \int_0^x e^{-nt} dt = \int_1^{e^{-x}} \frac{du}{1+u} = \ln(1 + e^{-x})$$

On en déduit alors que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \ln(1 + e^{-x}) \qquad \forall x > 0$$

on a alors

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \lim_{x\to 0 x>0} \ln(1 + e^{-x}) = \ln(2)$$

D'autre part la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est continue au point 0 donc

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \lim_{x\to 0} e^{-nx} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

On a alors

$$\forall x \geq 0 \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \ln(1 + e^{-x})$$

□